Capítulo 9

Teoria dos Jogos - Jogos na Forma Normal

9.1 Introdução

No curso de Microeconomia 1 nós estudamos a teoria da decisão individual. Isto é, nós estudamos como um agente econômico isolado faz suas escolhas. Na primeira parte do curso de Microeconomia 2 nós nos concentramos na teoria do equilíbrio geral. Embora a teoria de equilíbrio geral aceite a presença de diversos agentes, a hipótese lá é que os diversos agentes econômicos desconsideram o efeito que as suas decisões vão ter nas decisões dos outros agentes. Desta forma, a teoria do equilíbrio geral ignora completamente quaisquer considerações estratégicas que um agente possa ter na hora de tomar uma decisão.

A teoria do equilíbrio geral é muito útil e tem diversas aplicações em economia, mas algumas situações econômicas relevantes são inerentemente estratégicas, o que nos faz ter interesse em teorias que possam ser aplicadas a tais situações. Considere os seguintes exemplos:

Exemplo 9.1 (Problema dos Sorveteiros)**.** Suponha que tenhamos uma praia que seja atendida por dois sorveteiros. Para simplificar, suponha que as pessoas estejam distribuídas de maneira igual por toda a praia. Onde será que os dois sorveteiros vão se posicionar? Tal problema ainda não está totalmente especificado, mas nós já podemos perceber que este é um problema totalmente estratégico. O lucro do sorveteiro vai depender de onde ele e de onde o seu concorrente estiverem posicionados. Mais ainda, o sorveteiro sabe disto, o seu concorrente sabe disto, ele sabe que o seu concorrente sabe disto, etc.. Fica claro, que as teorias que estudamos até agora não são capazes de lidar com tal problema.

Exemplo 9.2 (Duopólio)**.** Suponha que somente duas empresas vendam o produto y. Existe um grande número de consumidores no mercado, de modo que os consumidores vão agir como tomadores de preço. O problema das duas empresas agora é escolher que preço eles devem cobrar pelo produto y de modo a maximizar os seus lucros. Novamente, o problema acima ainda não está totalmente especificado, mas nós já podemos perceber que ele também é um problema estratégico. O lucro de cada uma das empresas vai depender do preço que ela está cobrando e do preço que a sua concorrente está cobrando. Por outro lado, ambas as empresas sabem que a sua decisão de preço vai afetar a decisão de preço da concorrente. Como saber o que vai acontecer em tal situação?

Os dois exemplos acima mostram que nós precisamos de novas ferramentas para podermos estudar situações econômicas em que situações estratégicas estejam envolvidas. A ferramenta usada em economia para tanto é conhecida como Teoria dos Jogos.

9.2 O Conceito de Jogo

Nesta seção nós estudaremos o conceito de jogo. Um jogo para nós consistirá de três elementos. Primeiramente, nós temos um conjunto de jogadores, digamos $J := \{1, 2, ..., N\}$. Para cada jogador $i \in J$ nós associamos um conjunto de ações ou estratégias A_i. Finalmente, nós precisamos de algo que represente as regras do jogo. Para nós as regras do jogo vão ser representadas pelo que nós chamamos de funções de ganho dos agentes. A função de ganho do agente i, por exemplo, é simplesmente uma função que nos diz qual o prêmio que o agente i recebe dadas as estratégias usadas por todos os jogadores. Ou seja, dado um vetor $(a_1, a_2, ..., a_N)$ em que para cada j, $a_j \in A_j$, a função de ganho U^i do agente i associa um número real $U^i(a_1, ..., a_N)$ que representa o prêmio que o agente i recebe em tal situação. Em geral, nós chamamos um vetor de estratégias $(a_1, a_2, ..., a_N)$, de perfil de estratégias.

Exemplo 9.3 (Problema do Sorveteiro Revisitado)**.** Uma forma de modelar o problema dos sorveteiros como um jogo é representar a praia simplesmente como um segmento de reta ou intervalo. Digamos que nós representemos a praia como o intervalo fechado $[0, 1]$. Agora o problema de cada um dos sorveteiros é simplesmente escolher uma posição, ou número, entre 0 e 1. Ou seja, em tal problema os conjuntos de estratégias dos jogadores são dados por $A_1 = A_2 = [0, 1]$. Finalmente, para completar a descrição do jogo nós só precisamos de duas funções U^1 e U^2 que para cada par de de números a_1 e a_2 entre 0 e 1 nos diga qual o ganho de cada agente. Isto é, $U^1(a_1, a_2)$ nos dirá qual o ganho do sorveteiro 1 quando o sorveteiro 1 se coloca na posição a_1 e o sorveteiro 2 se coloca na posição a_2. De forma similar, $U^2(a_1, a_2)$ nos diz qual o ganho do sorveteiro 2 nesta mesma situação.[9.1]

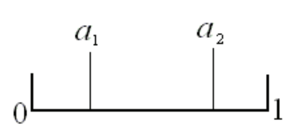

Figura 9.1: Representação gráfica do problema dos sorveteiros

[9.1] Dependendo da nossa modelagem o ganho de cada um dos sorveteiros pode ser, por exemplo, o seu lucro ou número de sorvetes vendidos. Quanto cada sorveteiro vende dada as suas posições na praia vai depender de hipóteses adicionais que nós incorporaremos ao modelo no futuro.

Exemplo 9.4 (Duopólio Revisitado)**.** No duopólio o conjunto de jogadores é logicamente dado pelas duas firmas, ou seja, $J := \{F_1, F_2\}$. Cada firma tem que escolher que preço cobrar pelo produto, portanto suas estratégias são dadas simplesmente por $A_1 = A_2 = [0, \infty)$. Para completar a descrição do jogo só precisamos agora de duas funções U^1 e U^2 que, dados os preços cobrados pelas duas firmas, nos informem o lucro de cada uma delas. Ou seja, dado um vetor de preços (a_1, a_2) com $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$, $U^1(a_1, a_2)$ nos diz qual o lucro da firma F_1 e $U^2(a_1, a_2)$ nos diz qual o lucro da firma F_2.

9.3 Conjuntos de Estratégias Finitos e Jogos na Forma Matricial

Nesta seção nós nos concentraremos em jogos em que o número de jogadores é igual a 2 e o conjunto de estratégias de cada jogador é finito. Para tais jogos existe uma forma bastante conveniente de representação. Nós vamos chamar tal representação de representação matricial de um jogo.

Para visualizar tal representação, comecemos com o caso em que cada um dos dois jogadores têm apenas duas estratégias disponíveis. Por exemplo, suponha que $A_1 := \{C, B\}$ e $A_2 := \{E, D\}$. Neste caso, para completar a descrição do jogo nós só precisamos especificar o ganho de cada um dos agentes em 4 situações distintas. Isto é, nós só precisamos conhecer $U^i(C,E), U^i(C,D), U^i(B,E)$ e $U^i(B,D)$, para $i = 1, 2$. A forma mais conveniente de representar tal jogo é em uma matriz em que o jogador 1 escolha a linha da matriz e o jogoador 2 escolhe a coluna. Em cada célula nós escrevemos o ganho dos agentes dadas as duas estratégias jogadas.

		Jogador 2	
		E	D
Jogador	C	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
1	B	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$

(9.1)

Geralmente, na literatura, nós encontraremos o jogador 1 representado como o jogador que escolhe as linhas e o jogador 2 representado como o que escolhe as colunas. Neste curso nós seguiremos esta convenção.

Exemplo 9.5 (Par ou ímpar)**.** Suponha que o jogador 1 tenha sido a pessoa que pediu par. Agora, as estratégias dos jogadores consistem apenas em colocar um número par ou um número ímpar. Digamos que o jogador que ganha o par ou ímpar recebe ganho 1 e o que perde recebe ganho -1. Na representação matricial tal jogo pode ser escrito como

		Jogador Ímpar	
		P	I
Jogador	P	$1, -1$	$-1, 1$
Par	I	$-1, 1$	$1, -1$

(9.2)

O jogo acima é o que chamamos de jogo de soma zero. Se você prestar atenção você vai perceber que em todas as situações a soma dos ganhos dos dois jogadores é igual a zero. Nos seus primórdios a teoria dos jogos dedicou bastante atenção a tais jogos, nem tanto por sua importância econômica, mas sim por ser este um dos únicos tipos de jogo que eles sabiam analisar satisfatoriamente. Após a introdução do conceito de equilíbrio de Nash, que nós estudaremos mais a frente, a importância relativa dos jogos de soma zero diminuiu bastante.

Consideremos mais um exemplo.

Exemplo 9.6 (Batalha dos Sexos)**.** Suponha agora que os jogadores 1 e 2 sejam um casal. Os jogadores têm que decidir aonde ir no sábado a noite. Jogador 1 é a mulher e ela prefere ir para uma discoteca. Já o jogador 2 prefere ir para o seu bar favorito. Como eles são um casal muito apaixonado, caso ambos vão para locais diferentes eles não derivam nenhuma utilidade. Tal situação pode ser representada pelo seguinte jogo:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Homem} \\ & & \begin{array}{cc} D & B \end{array} \\ \text{Mulher} & \begin{array}{c} D \\ B \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3,1 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 1,3 \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{9.3}$$

9.4 Jogos Resolvíveis por Dominância

Acima nós vimos que algumas situações econômicas relevantes podem ser representadas pelo conceito de jogo. É claro que uma teoria só é útil se nós pudermos usá-la para fazer previsões. No caso de uma jogo, nós estamos principalmente interessados em saber que estratégias serão usadas pelos jogadores naquele contexto. Na linguagem de teoria dos jogos, em geral nós estamos interessados em saber qual é a solução do jogo.

Vários conceitos de solução já foram discutidos na literatura. O mais famoso, é claro, é o conceito de equilíbrio de Nash. Nós estudaremos tal conceito mais tarde. Agora nós nos concentraremos em um conceito de solução mais básico que, embora não possa ser aplicado para todos os jogos, quando aplicável gera previsões claras, intuitivas, e empiricamente consistentes.

9.4.1 Estratégia Dominante

Suponha que tenhamos um jogo em que o conjunto de jogadores seja dado por $J = \{1, ..., N\}$. Dado um jogador qualquer i, nós dizemos que uma estratégia $a_i^* \in A_i$ é uma estratégia estritamente dominante para o jogador i se, independentemente das estratégias que os outros jogadores estejam jogando, a estratégia a_i^* é a única melhor estratégia para o jogador i. Formalmente, a_i^* é uma estratégia estritamente dominante para o jogador i se para qualquer perfil de estratégias $(a_1, ..., a_N)$, com $a_j \in A_j$ para todo j e $a_i \neq a_i^*$,

$$U^i(a_1, ..., a_i^*, ..., a_N) > U^i(a_1, ..., a_i, ..., a_N).$$

Ou seja, não importa o que os outros jogadores estejam jogando, jogar a_i^* é estritamente melhor para o jogador i do que jogar qualquer outra estratégia.

9.4.2 Solução por Estratégias Estritamente Dominantes

Suponha agora que todos os jogadores tenham uma estratégia estritamente dominante. É de se esperar que neste caso todos os jogadores usem exatamente as suas estratégias dominantes. Quando isto acontece nós dizemos que o jogo é resolvível por estratégias estritamente dominantes.

Exemplo 9.7 (Dilema dos Prisioneiros)**.** Dois indivíduos são presos por um crime grave e colocados em celas separadas. O delegado tenta obter uma confissão. Cada um deles, separadamente, recebe a seguinte informação: se um deles confessar e o outro não, quem confessou receberá uma pena leve de apenas um ano e o que não confessou receberá uma pena de dez anos. Caso ambos confessem, os dois receberão uma pena de cinco anos. Se ninguém confessar ainda é possível condenar ambos por um crime menor. Neste caso ambos recebem uma pena de dois anos. Tal situação pode ser representada pelo seguinte jogo em forma matricial:

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{Prisioneiro 2}} \\
 & & \multicolumn{1}{c}{C} & \multicolumn{1}{c}{N} \\
\cline{3-4}
\text{Prisioneiro} & C & -5,-5 & -1,-10 \\
\cline{3-4}
1 & N & -10,-1 & -2,-2 \\
\cline{3-4}
\end{array}
\tag{9.4}
$$

No jogo acima, independentemente do que o jogador (prisioneiro) 2 esteja jogando, a melhor estratégia para o jogador 1 é confessar. A mesma coisa acontece para o jogador 2. Portanto, o jogo acima é resolvível por estratégias estritamente dominantes e sua solução é (C, C). Ou seja, o conceito de solução por estratégias estritamente dominantes nos diz que dado o jogo acima os dois prisioneiros confessariam. De fato, dada a matriz de ganhos acima, é difícil imaginar que os jogadores agiriam de forma diferente.

No exemplo acima, embora o jogo tenha uma solução bem natural, nós podemos observar que o ganho final dos agentes não parece ser muito bom, dadas as opções que eles tinham. Em particular, caso ambos não confessassem os dois obteriam um ganho estritamente maior. Ou seja, em termos de ganhos, a solução do jogo não é eficiente no sentido de Pareto. Esta é uma característica marcante de situações estratégicas. Nós vamos ver que em geral, independentemente do conceito de solução usado, as soluções de jogos não têm que ser eficientes.

Jogos resolvíveis por estratégias estritamente dominantes são a melhor situação que podemos encontrar em teoria dos jogos. A solução de tais jogos é simples, intuitiva e geralmente corresponde ao que esperaríamos que ocorresse na vida real. O único problema com tal conceito de solução é que poucos jogos podem ser resolvidos desta maneira. Por exemplo, considere o exemplo do par ou ímpar acima. Suponha que o jogador que pediu ímpar esteja jogando um número ímpar. Neste caso a melhor estratégia para o jogador Par é jogar também um número ímpar. Por outro lado, se o jogador Ímpar estiver jogando um número par, então é melhor para par jogar um número par. Nós vemos que o jogador par não tem uma estratégia dominante neste caso. Uma análise similar mostra que o jogador ímpar também não tem uma estratégia dominante. Também no jogo Batalha dos Sexos nenhum jogador tem uma estratégia dominante. Você consegue ver isto?

9.5 Eliminação Iterativa de Estratégias Dominadas

9.5.1 Estratégias Estritamente Dominadas

Na seção anterior nós estudamos o conceito de uma estratégia estritamente dominante para um dos jogadores. Nós vimos que uma estratégia era estritamente dominante para o jogador i se, independentemente do que os outros jogadores estivessem jogando, ela fosse sempre estritamente melhor para o jogador i do que todas as suas outras estratégias. Agora nós estudaremos o conceito relacionado de uma estratégia estritamente dominada. Intuitivamente, uma estratégia a_i é estritamente dominada para o jogador i, se existe uma outra estratégia $\hat{a}_i$ tal que jogar $\hat{a}_i$ seja estritamente melhor para o jogador i do que jogar a_i, independentemente do que os outros jogadores estiverem jogando.

Formalmente, considere um jogo em que o conjunto de jogadores é dado por $J := \{1, ..., N\}$ e cada jogador j tem um conjunto de estratégias A_j. Pegue um jogador qualquer i. Uma estratégia a_i será estritamente dominada por uma outra estratégia $\hat{a}_i$ se, para qualquer perfil de estratégias $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ dos outros jogadores,

$$U^i (a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_N) > U^i (a_1, ..., a_i, ..., a_N) .$$

Exemplo 9.8. Considere o seguinte jogo:

Jogador 2

		E	D
Jogador 1	C	$1, -1$	$-1, 1$
	M	$-1, 1$	$1, -1$
	B	$-2, 5$	$-3, 2$

(9.5)

Observe que no jogo acima, independentemente da estratégia que o jogador 2 estiver jogando, a estratégia B dá um ganho estritamente menor para o jogador 1 do que a estratégia M (e do que a estratégia C). Neste caso dizemos que B é uma estratégia estritamente dominada por M.

Abaixo nós utilizaremos o conceito de estratégias estritamente dominadas para definir um novo conceito de solução, ou pelo menos de simplificação de um jogo.

9.5.2 Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas

Suponha que no jogo acima o jogador 2 ao tentar decidir o que fazer esteja tentando averiguar a possibilidade do jogador 1 jogar cada uma de suas estratégias. Ele logo perceberá que a estratégia B é estritamente dominada e, portanto, o jogador 1 nunca irá jogá-la. Desta forma, ao fazer considerações sobre o jogo, o jogador 2 agirá como se a estratégia B não fosse possível. Ou seja, ele agirá como se o jogo na verdade fosse apenas

Jogador 2

		E	D
Jogador 1	C	$1, -1$	$-1, 1$
	M	$-1, 1$	$1, -1$

Consideremos um outro exemplo.

Exemplo 9.9 (Amigo do Juiz)**.** Considere a seguinte variação do dilema dos prisioneiros:

		Prisioneiro 2 C	Prisioneiro 2 N
Prisioneiro 1	C	$-5, -5$	$-1, -10$
	N	$-10, -1$	$0, -2$

A estória agora (admitidamente um pouco boba) é que o prisioneiro 1 é amigo do juiz. Desta forma, quando nenhum dos prisioneiros confessa, ele consegue escapar sem nenhuma pena. Nas demais situações os ganhos de ambos são exatamente iguais aos ganhos no jogo original. Observe que agora confessar não é mais uma estratégia estritamente dominante para o jogador 1. Quando o jogador 2 não estiver confessando a melhor coisa para o jogador 1 seria não confessar. Portanto, agora o jogo não é mais resolvível por dominância. Mas considere a análise que fizemos acima. Ao olhar as opções do jogador 2, o jogador 1 percebe que a estratégia N é estritamente dominada pela estratégia C para aquele jogador. Portanto, sendo o jogador 1 alguém extremamente racional, ele desconsiderará a possibilidade de que o jogador 2 possa jogar N. Mas agora o jogo simplifica-se para

		Prisioneiro 2 C
Prisioneiro 1	C	$-5, -5$
	N	$-10, -1$

Mas agora jogar C é uma estratégia estritamente dominante para o jogador 1, ou, alternativamente, N é estritamente dominada por C para o jogador 1. Se eliminarmos N do jogo acima ficamos, novamente, com a previsão única de que os dois jogadores vão confessar.

Nos dois exemplo acima a eliminação de uma única estratégia estritamente dominada já foi suficiente para simplificar o jogo até um ponto que este pudesse ser resolvido por dominância. Em geral, os nossos agentes em economia são bem mais racionais do que isto e nós assumimos que eles podem aplicar o conceito de eliminação de estratégias estritamente dominadas inúmeras vezes. Considere o seguinte exemplo, aparentemente complexo, mas na verdade simples:

		Jogador 2 A	B	C	D
	E	$0, 7$	$2, 5$	$4, 0$	$2, 1$
Jogador 1	F	$5, 2$	$3, 3$	$5, 2$	$0, 1$
	G	$7, 0$	$2, 5$	$0, 7$	$0, 1$
	H	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$9, -1$

(9.6)

Se você tiver paciência, você pode checar que nenhum jogador tem uma estratégia dominante no jogo acima. Por outro lado, vemos que a estratégia D é estritamente dominada pela estratégia B. Portanto, se aplicarmos o raciocínio de eliminação de estratégias estritamente dominadas nós podemos simplificar o jogo acima para

Jogador 1 \ Jogador 2	A	B	C
E	$0,7$	$2,5$	$4,0$
F	$5,2$	$3,3$	$5,2$
G	$7,0$	$2,5$	$0,7$
H	$0,0$	$0,0$	$0,0$

Mas agora, no jogo simplificado acima, vemos que a estratégia H é estritamente dominada pela estratégia F. Novamente, aplicando o conceito de eliminação de estratégias estritamente dominadas nós obtemos o seguinte jogo, ainda mais simples:

Jogador 1 \ Jogador 2	A	B	C
E	$0,7$	$2,5$	$4,0$
F	$5,2$	$3,3$	$5,2$
G	$7,0$	$2,5$	$0,7$

Continuando com o mesmo procedimento, agora observe que a estratégia E é estritamente dominada pela estratégia F. O jogo reduz-se para

Jogador 1 \ Jogador 2	A	B	C
F	$5,2$	$3,3$	$5,2$
G	$7,0$	$2,5$	$0,7$

Agora a estratégia que é estritamente dominada é do jogador 2. Observe que A é estritamente dominada por B, o que nos dá o seguinte jogo:

Jogador 1 \ Jogador 2	B	C
F	$3,3$	$5,2$
G	$2,5$	$0,7$

Agora G é estritamente dominada por F e o jogo simplifica-se para

Jogador 1 \ Jogador 2	B	C
F	$3,3$	$5,2$

Finalmente, agora C é estritamente dominada por B, o que nos dá a previsão única de que no jogo acima os jogadores acabarão jogando F e B.

9.5.3 Eliminação de Estratégias Fracamente Dominadas

A primeira vista, a nossa definição de uma estratégia estritamente dominada parece ser muito restritiva. Lembre-se que tal definição considera uma estratégia estritamente dominada somente quando existe uma outra estratégia que é estritamente melhor do que ela em todas as outras situações. Uma definição alternativa poderia ser uma similar ao conceito de dominância no sentido de Pareto. Ou seja, poderíamos dizer que uma estratégia a_i é fracamente dominada por uma outra estratégia $\hat{a}_i$ se para qualquer perfil de estratégias $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ dos outros jogadores

$$U^i(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_N) \geq U^i(a_1, ..., a_i, ..., a_N)$$

e para pelo menos um perfil $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ dos outros jogadores,

$$U^i(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_N) > U^i(a_1, ..., a_i, ..., a_N).$$

Ou seja, agora não estamos pedindo que $\hat{a}_i$ seja estritamente melhor do que a_i em todas as situações. Estamos pedindo que $\hat{a}_i$ seja pelo menos tão boa quanto a_i em todas as situações e exista pelo menos uma situação em que $\hat{a}_i$ seja estritamente melhor do que a_i. O conceito de uma estratégia fracamente dominada é razoável e parece que existe espaço para considerarmos o conceito de eliminação de estratégias fracamente dominadas. Embora a eliminação de estratégias fracamente dominadas seja de fato discutida na literatura, tal conceito é mais problemático do que o conceito de eliminação de estratégias estritamente dominadas.

Alguns problemas que acontecem quando aplicamos o conceito de eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas são os seguintes:

1. A ordem em que eliminamos iterativamente estratégias fracamente dominadas altera o resultado final. Tal fato não ocorre com a eliminação de estratégias estritamente dominadas, embora a demonstração de tal fato esteja um pouco acima das nossas capacidades neste curso.

2. Perfis de alternativas que são equilíbrios de Nash, algo que nós estudaremos abaixo, podem ser eliminados se aplicarmos o conceito de eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas. Novamente, tal fato não ocorre quando aplicamos o conceito de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

Nós pararemos a discussão a respeito do conceito de eliminação de estratégias fracamente dominadas aqui. Embora tal conceito tenha alguma importância teórica, para nós ele não terá muita importância. Tudo que vocês precisam saber é que tal conceito é um pouco problemático o que nos leva a trabalhar sempre com eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

9.6 Equilíbrio de Nash

Até agora nós já aprendemos dois possíveis métodos de solução para jogos. Nós vimos que alguns jogos podem ser resolvidos pela existência de estratégias estritamente dominantes para todos os jogadores e também vimos que alguns outros jogos podem ser resolvidos pela eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Não é difícil ver que o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas é mais geral do que o método de solução por dominãncia. Isto é, todo jogo que é resolvível por dominância é também resolvível por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas e a solução é a mesma.[9.2]

Mesmo sendo mais geral do que o método de solução por dominância, ainda existem vários jogos em que o processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas não nos dá uma solução. Algumas vezes, como no jogo (9.5) acima, tal método até simplifica o jogo, mas não nos fornece uma previsão clara do que os dois jogadores vão fazer.

Nesta seção nós estudaremos o conceito de equilíbrio de Nash. Tal conceito nos fornecerá o método de solução mais utilizado em teoria dos jogos. Nós começamos com o conceito de uma melhor resposta.

9.6.1 Melhores Respostas

Suponha que tenhamos um jogo com N jogadores. Fixe um jogador i qualquer e considere um perfil de estratégias $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ dos outros jogadores. Nós podemos fazer a seguinte pergunta: dado que os outros jogadores estão jogando $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ qual a melhor estratégia (ou as melhores estratégias) para o jogador i. Ou seja, nós podemos tentar encontrar as estratégias $a_i \in A_i$ que resolvem o seguinte problema de maximização:

$$\max_{a_i \in A_i} U^i (a_1, ..., a_i, ..., a_N)$$

As estratégias do jogador i que resolvem o problema acima são chamadas de melhores respostas do jogador i a $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$. É interessante termos uma notação para representar, dado um perfil de estratégias dos outros jogadores, as melhores respostas do jogador i. Defina a correspondência de melhores respostas B^i do jogador i, como um mapa que associa a cada perfil de estratégias dos outros jogadores, o conjunto de alternativas do jogador i que são melhores respostas àquele perfil. Formalmente, dado um perfil de estratégias $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ para os outros jogadores, defina $B^i (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ como o conjunto de estratégias do jogador i que resolvem o problema de maximização acima.

Exemplo 9.10. Considere o seguinte jogo:

		Jogador 2			
		A	B	C	D
	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$	$2,1$
Jogador	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$	$0,1$
1	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$	$0,1$
	H	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$9,-1$

É fácil ver que no exemplo acima $B^1 (B) = \{F\}$, ou seja, a única melhor resposta do jogador 1 à estratégia B é exatamente F. Por outro lado, $B^1 (A) = \{F, G\}$, ou seja, tanto F quanto G são melhores respostas para o jogador 1 quando 2 joga A. Para finalizar, observe que $B^2 (F) = \{A, B, C\}$, ou seja, A, B e C são melhores respostas para o jogador 2 quando 1 joga F.

[9.2] Se o jogador i tem uma estratégia estritamente dominante, então todas as suas outras estratégias são estritamente dominadas por tal estratégia e, portanto, serão eliminadas.

9.6.2 Equilíbrio de Nash

Considere o seguinte jogo:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador 1	C	$5,1$	$4,0$
	M	$6,0$	$3,1$
	B	$6,4$	$3,4$

No jogo acima, em termos de melhores respostas, nós temos $B^1(E) = \{M, B\}$, $B^1(D) = \{C\}$, $B^2(C) = \{E\}$, $B^2(M) = \{D\}$ e $B^2(B) = \{E, D\}$. Observe que B é uma melhor resposta para o jogador 1 quando 2 joga E e E é uma melhor resposta para o jogador 2 quando 1 joga B. De certa forma, existe um certo equilíbrio no perfil de estratégias (B, E). Mesmo se 2 já tivesse observado que 1 jogou B, não haveria razão para 2 mudar de estratégia. De forma similar, mesmo que 1 já tivesse observado que 2 jogou E, não haveria motivo para 1 desejar mudar de estratégia. Quando um perfil de estratégias satisfaz tal tipo de condição nós dizemos que tal perfil é um equilíbrio de Nash do jogo.

Formalmente, considere um jogo com N jogadores. Um perfil de estratégias $(a_1^*, ..., a_N^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo se para todo jogador i, $a_i^* \in B^i\left(a_1^*, ..., a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, ..., a_N^*\right)$. Ou seja, em um equilíbrio de Nash todos os jogadores estão fazendo o melhor que eles poderiam fazer dadas as estratégias que estão sendo jogadas pelos outros jogadores.

Exemplo 9.11 (Dilema dos Prisioneiros revisitado)**.** Considere o dilema dos prisioneiros original, isto é:

		Prisioneiro 2	
		C	N
Prisioneiro 1	C	$-5,-5$	$-1,-10$
	N	$-10,-1$	$-2,-2$

Observe que $B^1(C) = \{C\}$ e $B^2(C) = \{C\}$. Ou seja, para qualquer um dos jogadores, se o outro estiver jogando C, então a melhor coisa que ele tem a fazer é jogar C, também. Portanto, o perfil (C, C) é um equilíbrio de Nash do jogo Dilema dos Prisioneiros.

Vimos no exemplo acima que o perfil de estratégias (C, C) é um equilíbrio de Nash para o jogo dilema dos prisioneiros. Lembre-se que tal perfil também era a solução por dominância do jogo. De fato, tal propriedade é geral, como a proposição abaixo mostra:

Proposição 9.1. *Suponha que um perfil $(a_1^*, ..., a_N^*)$ seja a solução por dominância de um determinado jogo. Então, tal perfil é também um equilíbrio de Nash do jogo.*

Demonstração da Proposição. Fixe um jogador qualquer i. Como, por hipótese, a_i^* é uma estratégia estritamente dominante para i, sabemos que para qualquer estratégia $a_i \in A_i$, com $a_i \neq a_i^*$ nós temos que ter

$$U^i(a_1^*, ..., a_i^*, ..., a_N^*) > U^i(a_1^*, ..., a_i, ..., a_N^*).$$

Mas isto implica que $B^i\left(a_1^*, ..., a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, ..., a_N^*\right) = \{a_i^*\}$. Como isto é válido para todos os jogadores i, nós vemos que $(a_1^*, ..., a_N^*)$ satisfaz a condição que define um equilíbrio de Nash. $\|$

Vamos estudar mais um exemplo.

Exemplo 9.12. Considere o seguinte jogo, que é o mesmo jogo (9.6) estudado acima:

		Jogador 2			
		A	B	C	D
	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$	$2,1$
Jogador	F	$5,2$	$3,3$	$5,2$	$0,1$
1	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$	$0,1$
	H	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$9,-1$

Nós vimos que se aplicássemos o processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas o único perfil de estratégias que sobreviveria é (F, B). Mas observe que $B^1(B) = \{F\}$ e $B^2(F) = \{B\}$, portanto, (F, B) é também um equilíbrio de Nash do jogo.

Novamente, tal fenômeno é geral como a proposição abaixo, que infelizmente nós não vamos demonstrar, mostra.

Proposição 9.2. *Suponha que ao aplicarmos o procedimento de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas a um determinado jogo somente o perfil* $(a_1^*, ..., a_N^*)$ *sobreviva. Então,* $(a_1^*, ..., a_N^*)$ *é um equilíbrio de Nash do jogo em questão.*

Finalmente, vamos considerar um último exemplo.

Exemplo 9.13. Considere novamente o jogo estudado no exemplo 9.10 acima. Isto é,

		Jogador 2			
		A	B	C	D
	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$	$2,1$
Jogador	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$	$0,1$
1	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$	$0,1$
	H	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$9,-1$

Observe que $B^1(B) = \{F\}$ e $B^2(F) = \{A, B, C\}$, portanto (F, B) é um equilíbrio de Nash do jogo acima. Agora, observe, também, que a estratégia D é estritamente dominada pela estratégia B. Se nós aplicarmos o princípio da eliminação de estratégias estritamente dominadas nós obtemos o seguinte jogo simplificado:

		Jogador 2		
		A	B	C
	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$
Jogador	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$
1	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$
	H	$0,0$	$0,0$	$0,0$

Mas agora H é estritamente dominada por F, o que nos permite simplificar o jogo ainda mais para

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$
1	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$
	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$

Finalmente, agora nós observamos que E é estritamente dominada por F, o que nos dá o jogo ainda mais simplificado

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$
1	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$

Agora nenhum dos jogadores tem mais estratégias estritamente dominadas. No entanto, observe que para o jogo simplificado acima $B^1(B) = \{F\}$ e $B^2(F) = \{A, B, C\}$. Ou seja, o perfi (F, B) ainda é um equilíbrio de Nash do jogo acima.

Novamente, o fenômeno acontecido acima é geral. Isto é, se simplificarmos um jogo usando eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, o conjunto de equilíbrios de Nash do jogo simplificado é o mesmo do jogo original. Tal resultado é formalizado na proposição abaixo.

Proposição 9.3. *Suponha que tenhamos um jogo qualquer e fixe um perfil qualquer* $(a_1^*, ..., a_N^*)$ *deste jogo. Suponha agora que simplifiquemos o jogo usando o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. O perfil* $(a_1^*, ..., a_N^*)$ *é um equilíbrio de Nash do jogo original se e somente se ele for um equilíbrio de Nash do jogo simplificado.*

A proposição acima nos mostra que se estivermos interessados em encontrar os equilíbrios de Nash de um determinado jogo e este tiver estratégias estritamente dominadas, então é uma boa idéia primeiro usar o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas para simplificar o jogo o máximo possível para só então tentar encontrar os equilíbrios de Nash do jogo diretamente.

9.7 Aplicações

9.7.1 Equilíbrio de Cournot

Suponha que o mercado de produção de um determinado bem seja dividido entre duas empresas, firma F_1 e firma F_2. Suponha que os custos de produção das duas firmas sejam dados simplesmente por

$$C_i(y) = cy.$$

Ou seja, as duas firmas têm o mesmo custo marginal constante e igual a c. Finalmente, suponha que a curva de demanda inversa pelo bem seja dada por

$$p(y) = a - by.$$

Quanto será que cada uma das firmas vai produzir em tal situação? Primeiramente, observe que a situação acima pode ser descrita por um jogo. Obviamente o conjunto de jogadores é dado por $J = \{F_1, F_2\}$. As estratégias de cada uma das firmas serão escolher as quantidades que elas vão produzir. Ou seja, $A_1 = A_2 = [0, \infty)$. E as funções de ganhos de cada uma das firmas serão dadas pelo seu lucro, ou seja, para a firma i,

$$U^i(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2) y_i - cy_i.$$

Agora que já temos a descrição completa do nosso jogo, nós podemos tentar analisar a situação acima sob uma visão de teoria dos jogos. Suponha, por exemplo, que a firma 2 esteja produzindo uma quantidade qualquer y_2. Qual seriam as melhores respostas da firma 1 a tal estratégia. Para descobrir isto nós temos que resolver o seguinte problema:

$$\max_{y_1} p\left(y_1+y_2\right) y_1 - c y_1$$

A condição de primeira ordem do problema acima pode ser escrita como

$$p'\left(y_1+y_2\right) y_1 + p\left(y_1+y_2\right) = c.^{9.3}$$

Que utilizando as funções que definimos acima pode ser escrita como

$$-b y_1 + a - b\left(y_1+y_2\right) = c.$$

Resolvendo a equação acima para y_1 nós obtemos:

$$y_1 = \frac{a - b y_2 - c}{2b}.$$

Portanto, a correspondência de melhores respostas para o jogador 1 neste caso é dada simplesmente por

$$B^1\left(y_2\right) = \frac{a - b y_2 - c}{2b}.^{9.4}$$

Nós podemos repetir a mesma análise acima para o jogador 2, o que vai nos dar a seguinte correspondência de melhores respostas para tal jogador:

$$B^2\left(y_1\right) = \frac{a - b y_1 - c}{2b}.$$

Será que existe algum equilíbrio de Nash para este jogo? Isto é, será que existe um perfil de estratégias $\left(y_1^*, y_2^*\right)$ tal que $y_1^* \in B^1\left(y_2^*\right)$ e $y_2^* \in B^2\left(y_1^*\right)$? Como em todas as situações os dois jogadores têm apenas uma única melhor resposta, um perfil que seja equilíbrio de Nash para tal jogo tem que satisfazer as sesguintes condições:

$$y_1^* = \frac{a - b y_2^* - c}{2b}$$

e

$$y_2^* = \frac{a - b y_1^* - c}{2b}.$$

Mas as duas equações acima nos dão um sistema linear que pode ser facilmente resolvido. Resolvendo o sistema acima nós obtemos:

$$y_1^* = y_2^* = \frac{a - c}{3b}.$$

Isto é, o perfil de estratégias $\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$ é o único equilíbrio de Nash do jogo acima.

[9.3] Observe que esta é a velha condição receita marginal é igual ao custo marginal. A diferença agora é que a receita marginal depende do que a empresa F_2 está produzindo.

[9.4] Na verdade, para valores de y_2 muito altos a escolha ótima da firma F_1 será produzir zero. Formalmente, a correta correspondência de melhores respostas da firma F_1 é dada por $B^1\left(y_2\right) = \max\left\{\frac{a-by_2-c}{2b}, 0\right\}$. Nós vamos ignorar tal fato, já que não fará muita diferença para a nossa discussão no texto.

9.7.2 Problema dos Sorveteiros

Voltemos agora ao problema dos sorveteiros. Em tal problema nós temos uma praia representada pelo intervalo $[0,1]$ e dois sorveteiros têm que escolher aonde se posicionarem nesta praia. A nossa hipótese é que as pessoas estão distribuídas de forma uniforme pela praia e que ambos os sorveteiros vendem exatamente o mesmo sorvete pelo mesmo preço. Desta forma, as pessoas irão sempre comprar do sorveteiro que estiver mais próximo. Caso os dois se posicionem no mesmo lugar, então metade das pessoas comprará de um deles e a outra metade comprará do outro. Desta forma, para o sorveteiro 1, por exemplo, se ele estiver na posição α e o sorveteiro 2 estiver na posição β, o seu número de sorvetes vendidos será:

$$S^1(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\alpha-\beta}{2} + (1-\alpha), \text{ se } \alpha > \beta \\ \frac{1}{2} \text{ se } \alpha = \beta \\ \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} \text{ se } \beta > \alpha \end{cases}.$$

A figura 9.2 ilustra as duas situações em que os dois sorveteiros posicionam-se em locais distintos. A área cinza na figura representa as pessoas que vão comprar do sorveteiro 1.

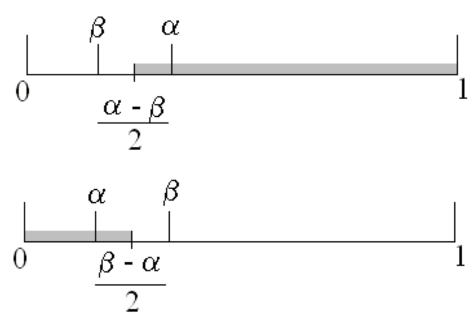

Figura 9.2: Sorvetes vendidos pelo sorveteiro 1

O número de sorvetes vendidos pelo sorveteiro 2 segue padrão similar. Suponha que o sorveteiro 2 esteja na posição β e o sorveteiro 1 esteja na posição α. Então, o número de sorvetes vendidos pelo sorveteiro 2 será dado por

$$S^2(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta-\alpha}{2} + (1-\beta), \text{ se } \beta > \alpha \\ \frac{1}{2} \text{ se } \alpha = \beta \\ \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} \text{ se } \alpha > \beta \end{cases}.$$

Para que possamos analisar a situação acima como um jogo que saibamos resolver vamos fazer uma última simplificação. Vamos supor que ambos os sorveteiros só possam escolher posições que sejam múltiplos de 0,05. Ou seja, $A_1 = A_2 = \{0; 0,05; 0,1; 0,15; ...\}$. A descrição do nosso jogo agora está completa. Já temos os conjuntos de estratégias dos dois jogadores, A_1 e A_2, e as funções ganho dos dois jogadores, S^1 e S^2. Tentemos agora identificar as melhores respostas do jogador 1 dado que 2 esteja posicionado em uma posição β. Suponha primeiro que $\beta < 0,5$. Neste caso, é fácil ver que a melhor coisa que 1 pode fazer é escolher a posição

$\alpha^* = \beta + 0,05$ (ver figura 9.3). Deste modo, ele conquistará todos os clientes a sua direita mais 0,025, que corresponde à metade dos clientes entre ele e o sorveteiro 2. Como $\beta < 0,5$ isto dará um número de sorvetes vendidos maior do que $1/2$. Portanto é melhor escolher tal posição do que escolher $\alpha = \beta$. Se ele escolhesse um valor de $\alpha > \alpha^*$, então o número de clientes a sua direita iria diminuir. Como ele só fica com metade dos clientes entre ele e o sorveteiro 2, isto significa que ele estaria perdendo clientes (ver figura 9.3). Finalmente, se ele escolhesse um valor de $\alpha < \beta$, então ele estaria conquistando os clientes a sua esquerda mais metade dos clientes entre ele e o sorveteiro 2. Como $\beta < 0,5$ isto dará um número de sorvetes vendidos menor do que $1/2$ (ver figura 9.3). Nós verificamos, então, que realmente a melhor resposta neste caso é escolher $\alpha^* = \beta + 0,05$.

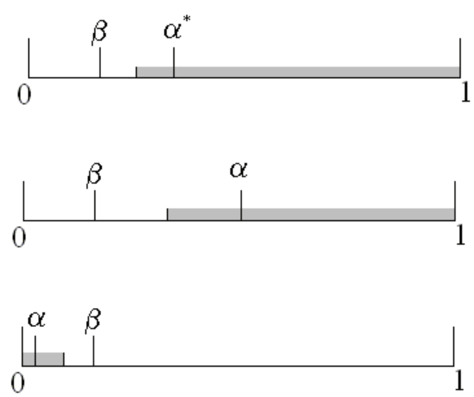

Figura 9.3: Resposta ótima do sorveteiro 1

Uma análise exatamente simétrica ao caso $\beta < 0,5$ nos mostra que se o sorveteiro 2 estiver jogando um valor de $\beta > 0,5$, então a melhor resposta do sorveteiro 1 é escolher a posição $\alpha^* = \beta - 0,05$. E se o jogador 2 estiver posicionado exatamente no meio? Neste caso é fácil ver que qualquer valor de $\alpha > \beta = 0,5$ dá um ganho para o sorveteiro 1 menor do que $1/2$ (ver figura 9.4). Similarmente, qualquer valor de $\alpha < \beta = 0,5$ também dá um ganho para o sorveteiro 1 menor do que meio (ver figura 9.4). Ou seja, a melhor resposta para o jogador 1 neste caso é também se posicionar no meio da praia. Isto é, sua melhor resposta é escolher $\alpha^* = 0,5$.

Resumindo a análise acima, nós chegamos à seguinte correspondência de melhores respostas para o sorveteiro 1:

$$B^1(\beta) = \begin{cases} \beta + 0,05 \text{ se } \beta < 0,5 \\ 0,5 \text{ se } \beta = 0,5 \\ \beta - 0,05 \text{ se } \beta > 0,5 \end{cases}.$$

A situação do sorveteiro 2 é absolutamente simétrica, portanto, a sua correspondência de melhores respostas é dada por

$$B^2(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 0,05 \text{ se } \alpha < 0,5 \\ 0,5 \text{ se } \alpha = 0,5 \\ \alpha - 0,05 \text{ se } \alpha > 0,5 \end{cases}.$$

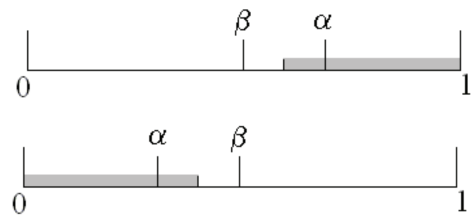

Figura 9.4: Respostas não ótimas do sorveteiro 1 quando 2 está no centro da praia

Agora que já conhecemos as melhores respostas de ambos os jogadores, nós podemos tentar descobrir se este jogo tem algum equilíbrio de Nash. Será que existe algum equilíbrio de Nash em que o sorveteiro 1 escolhe uma posição $\alpha^* < 0,5$? Se $\alpha^* < 0,5$, então a única melhor resposta do sorveteiro 2 é escolher $\beta = \alpha^* + 0,05$. Observe que, por construção, tal valor de β é menor ou igual a $0,5$. Mas para $\beta \leq 0,5$ a melhor resposta do jogador 1 será escolher ou $\alpha = 0,5$, no caso em que $\beta = 0,5$, ou $\alpha = \beta + 0,05$, no caso em que $\beta < 0,5$. Mas tanto $\alpha = 0,5$ como $\alpha = \beta + 0,05 = \alpha^* + 0,05 + 0,05$ são estritamente maiores do que α^*. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em tal situação.

Será que existe equilíbrio de Nash em que o sorveteiro 1 escolhe um valor $\alpha^* > 0,5$? Se $\alpha^* > 0,5$, então a melhor resposta do sorveteiro 2 é escolher $\beta = \alpha^* - 0,05$. Novamente, por construção, tal valor de β é maior ou igual a $0,5$. Mas para valores de $\beta \geq 0,5$, a melhor resposta do sorveteiro 1 é $\alpha = 0,5$, quando $\beta = 0,5$, e $\alpha = \beta - 0,05$, quando $\beta > 0,5$. De novo, tanto $\alpha = 0,5$, como $\alpha = \beta - 0,05 = \alpha^* - 0,05 - 0,05$ são estritamente menores do que α^*. Nós concluímos que também neste caso não existe equilíbrio de Nash.

Só nos resta testar uma última alternativa. Será que existe equilíbrio de Nash em que o jogador 1 joga $\alpha^* = 0,5$. Neste caso, a melhor resposta do sorveteiro 2 é também se posicionar na posição $\beta^* = 0,5$. Ainda, se o sorveteiro 2 estiver posicionado no centro da praia, a melhor resposta do sorveteiro 1 é, de fato, também se posicionar no centro da praia. Ou seja, $\alpha^* = 0,5$ é realmente uma melhor resposta para o sorveteiro 1 quando $\beta^* = 0,5$. Acabamos de mostrar, então, que o único equilíbrio de Nash do jogo dos sorveteiros é exatamente o perfil em que ambos os sorveteiros se posicionam no centro da praia.

9.8 Exercícios

Exercício 9.1 (Jogo da Produção de Armas Nucleares)**.** *Dois países vizinhos estão considerando a possibilidade de construir armas nucleares. Se ambos construírem armas nucleares, então a situação será* ***ruim para os dois****, já que isto implica em um alto custo financeiro, além do risco que um vizinho detentor de armas nucleares representa. Caso apenas um dos países construa armas nucleares, então o país construtor desfrutará de uma grande vantagem estratégica e esta acaba sendo a* ***melhor situação*** *possível para ele. Por outro lado, o país que não construir ficará numa situação muito ruim, já que ficará praticamente submisso ao vizinho. Esta é a* ***pior situação*** *possível para ele. Finalmente, se ninguém construir armas nucleares, a situação é* ***boa*** *para os dois, já que ambos economizam bastante dinheiro e* *ninguém fica ameaçado. Mesmo assim, ambos os países* ***prefeririam*** *a vantagem estratégica de serem os únicos detentores da tecnologia nuclear.*

(a) *Descreva a situação acima como um jogo matricial. Os exatos valores dos ganhos dos jogadores não importam. Você pode colocar o que você quiser, desde que eles representem a situação acima de forma consistente. Em especial, as informações em negrito têm que estar refletidas no jogo que você escrever.*

(b) *Resolva o jogo que você escreveu utilizando o conceito de solução mais simples possível. Isto é, se o jogo for resolvível por dominância, então resolva-o por dominância. Caso o jogo não seja resolvível por dominância, então tente resolvê-lo por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Caso ainda assim não seja possível resolver o jogo, então tente resolvê-lo encontrando os seus equilíbrios de Nash (em estratégias puras).*

Exercício 9.2 (Jogo do Dinheiro Grátis)**.** *Dois agentes econômicos extremamente racionais participam do seguinte jogo em que eles podem ganhar mais de um milhão de reais. Primeiramente, ambos os jogadores, em salas separadas, têm que escrever* 1, 100, 10.000 *ou* 1.000.000 *em folhas de papel que posteriormente são colocadas dentro de envelopes. Quando os envelopes são abertos, o jogador que escreveu o menor número recebe uma quantia, em reais, igual à soma dos dois números. O outro jogador não recebe nada. Caso ambos tenham escrito o mesmo número, então cada um recebe, em reais, exatamente o valor que cada um escreveu. Ou seja, se ambos escreverem* 10.000*, por exemplo, então cada jogador recebe* 10.000 *reais.*

(a) *Descreva a situação acima como um jogo matricial.*

(b) *Resolva o jogo que você escreveu na parte (a) por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Será que tais agentes realmente merecem a terminologia racionais?*

Exercício 9.3 (Sorveteiros em Praia Circular)**.** *Considere novamente o problema dos sorveteiros que têm que se posicionar em uma faixa de areia. A diferença agora é que esta faixa de areia se encontra ao redor de uma lagoa circular. Suponha que o perímetro da lagoa seja 1 e que as pessoas estejam distribuídas de maneira uniforme por toda a faixa de areia. Os sorveteiros são idênticos e, portanto, as pessoas sempre compram do sorveteiro mais próximo. Caso mais de um sorveteiro estejam posicionados em uma mesma posição, as pessoas que estão mais próximas daquela posição se dividem igualmente entre todos os sorveteiros lá posicionados.*

(a) *Suponha que apenas dois sorveteiros estejam escolhendo aonde se posicionarem na faixa de areia ao redor da lagoa. Caracterize todos os equilíbrios de Nash deste jogo. (Dica: Você não precisa sair fazendo conta. A caracterização dos equilíbrios pode ser bem intuitiva, você pode usar figuras, etc., mas seja preciso na sua explicação. Finalmente, existe um número* ***enorme*** *de equilíbrios).*

(b) *Suponha que agora tenhamos três sorveteiros escolhendo uma posição na faixa de areia. Caracterize todos os equilíbrios de Nash do jogo agora (Dica: Novamente existirão diversos equilíbrios, mas você terá que dividí-los em duas classes. Equilíbrios em que nenhum dos sorveteiros se posiciona na mesma posição que algum outro sorveteiro e equilíbrios em que pelo menos 2 sorveteiros se posicionam em uma mesma posição).*

Capítulo 10

Teoria dos Jogos - Estratégias Mistas

10.1 Introdução

Agora que nós já conhecemos o conceito de equilíbrio de Nash, nós discutiremos a existência de equilíbrio de Nash. Em geral, é possível que um determinado jogo não tenha equilíbrio de Nash. Mesmo jogos matriciais simples muitas vezes não possuem nenhum equilíbrio. Para escapar de tal situação nós introduziremos o conceito de estratégias mistas. Admitindo a possibilidade de uso de estratégias mistas, jogos matriciais sempre têm equilíbrio de Nash. Por simplicidade, ao estudarmos estratégias mistas nós nos concentraremos em jogos matriciais 2x2. Isto é, jogos com 2 jogadore em que cada um dos jogadores tem apenas duas estratégias puras.

10.2 Estratégias Mistas e Existência de Equilíbrio

Voltemos a um dos primeiros jogos que estudamos: o jogo do par ou ímpar. A matriz de ganhos daquele jogo era dada por

		Jogador Ímpar	
		P	I
Jogador Par	P	$1, -1$	$-1, 1$
	I	$-1, 1$	$1, -1$

Olhando para a matriz de ganhos acima nós vemos que quando o jogador Ímpar joga P, a melhor resposta para o jogador Par é P. Mas se o jogador Par joga P, a melhor resposta para o jogador Ímpar é I. De forma similar, se o jogador Ímpar joga I, a melhor resposta para o jogador Par é I. Mas quando o jogador Par joga I a melhor resposta do jogador Ímpar é P. Nós acabamos de verificar que o jogo acima não tem nenhum equilíbrio de Nash. O jogo de par ou ímpar não tem nada de especial. Na verdade, vários outros jogos não têm equilíbrio de Nash.

Esta situação é aparentemente problemática. Se nem mesmo um jogo tão simples como o jogo de par ou ímpar tem equilíbrio de Nash, qual a utilidade de tal conceito, então? A solução que temos para tal problema vem da própria forma como o jogo de par ou ímpar é jogado na vida real. Na vida real, se o jogador Par jogasse sempre P, então o jogador Ímpar iria acabar descobrindo isto e iria sempre jogar I, ganhando o jogo em todas as ocasiões. A mesma coisa aconteceria se qualquer um dos jogadores jamais variasse a sua estratégia. Por causa disto, o que nós observamos na prática? Na prática, nós observamos que os jogadores de par ou ímpar costumam variar as suas jogadas de forma mais ou menos aleatória.

A idéia de uma escolha aleatória de ações motivou o conceito de estratégias mistas. A idéia agora é trabalhar com um conjunto de estratégias maior para ambos os jogadores. Os jogadores não estarão mais limitados a escolher jogar P ou I, mas poderão, também, escolher jogar P com uma probabilidade α e I com uma probabilidade $(1-\alpha)$. Formalmente, nós estamos usando a matriz de ganhos acima para definir um novo jogo em que o conjunto de estratégias dos dois jogadores agora é dado por $A_1 = A_2 = [0,1]$. A interpretação aqui é que $\alpha \in A_1$ é a probabilidade com que o jogador Par joga P. Por construção, isto implica que ele joga I com probabilidade $1-\alpha$. Nós ainda faremos a hipótese adicional de que no novo jogo os ganhos dos dois jogadores serão dados pelos seus ganhos esperados, dados os ganhos do jogo original. Por exemplo, se Par está jogando a estratégia α e Ímpar está jogando a estratégia β, então o ganho de Par no novo jogo é dado por

$$\begin{aligned} U^{Par}(\alpha,\beta) &= \alpha\beta U^{Par}(P,P) + \alpha(1-\beta)U^{Par}(P,I) \\ &\quad (1-\alpha)\beta U^{Par}(I,P) + (1-\alpha)(1-\beta)U^{Par}(I,I) \\ &= \alpha\beta * 1 + \alpha(1-\beta) * (-1) + (1-\alpha)\beta * (-1) \\ &\quad + (1-\alpha)(1-\beta) * 1 \\ &= 1 + 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta.^{10.1} \end{aligned}$$

De forma similar, o ganho do jogador Ímpar no novo jogo é dado por

$$\begin{aligned} U^{Ímpar}(\alpha,\beta) &= \alpha\beta U^{Ímpar}(P,P) + \alpha(1-\beta)U^{Ímpar}(P,I) \\ &\quad (1-\alpha)\beta U^{Ímpar}(I,P) + (1-\alpha)(1-\beta)U^{Ímpar}(I,I) \\ &= \alpha\beta * (-1) + \alpha(1-\beta) * 1 + (1-\alpha)\beta * 1 \\ &\quad + (1-\alpha)(1-\beta) * (-1) \\ &= 2\alpha + 2\beta - 1 - 4\alpha\beta.^{10.2} \end{aligned}$$

O nosso novo jogo está, portanto, completamente especificado. É válido perguntarmos, por exemplo, se este novo jogo tem algum equilíbrio de Nash. Nós estudaremos este tipo de jogo na próxima subseção.

10.2.1 Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

Acima, nós aprendemos como construir, a partir de um jogo em forma matricial, um novo jogo em que as estratégias dos jogadores agora consistem das probabilidades com que cada jogador está jogando cada uma de suas estratégias. Quando fazemos isto dizemos que estamos

[10.1] Nós estamos cometendo um pequeno abuso de notação aqui. Nós estamos usando U^{Par} para denotar tanto o ganho do jogador Par no novo jogo, como os ganhos de par representados na matriz de ganhos original. Como os argumentos de U^{Par} são diferentes nos dois casos, tal abuso de notação não gera confusão.

[10.2] Novamente, nós estamos cometendo um abuso de notação aqui.

permitindo o uso de estratégias mistas. Neste curso, nós só trabalharemos com estratégias mistas de jogos 2x2, isto é, jogos com 2 jogadores em que ambos os jogadores têm apenas 2 estratégias. No entanto, todos os resultados discutidos nesta seção se generalizam para qualquer jogo em que o número de jogadores seja finito e os conjuntos de estratégias de todos os jogadores sejam também finitos.

Considere um jogo 2x2 genérico. Nós podemos representar tal jogo pela seguinte matriz:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador	C	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
1	B	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$

.

Como vimos na seção anterior, nós podemos usar o jogo acima para definir um novo jogo em que os conjuntos de estratégias dos dois jogadores agora são $A_1 = A_2 = [0,1]$. A interpretação é que $\alpha \in A_1$ é a probabilidade com que o jogador 1 está jogando C. De forma similar, $\beta \in A_2$ é a probabilidade com que o jogador 2 está jogando E .Finalmente, os ganhos de ambos os jogadores no jogo com estratégias mistas são dados por

$$\begin{aligned} U^1(\alpha,\beta) &= \alpha\left[\beta U^1(C,E) + (1-\beta)U^1(C,D)\right] + (1-\alpha)\left[\beta U^1(B,E) + (1-\beta)U^1(B,D)\right] \\ &= \alpha U^1(1,\beta) + (1-\alpha)U^1(0,\beta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U^2(\alpha,\beta) &= \beta\left[\alpha U^2(C,E) + (1-\alpha)U^2(B,E)\right] + (1-\beta)\left[\alpha U^2(C,D) + (1-\alpha)U^2(B,D)\right] \\ &= \beta U^2(\alpha,1) + (1-\beta)U^2(\alpha,0). \end{aligned}$$

Observe que os ganhos de ambos os jogadores com estratégias mistas são sempre médias ponderadas dos seus ganhos se eles estivessem usando estratégias degeneradas (que dão probabilidade 1 para uma das duas estratégias puras). Um perfil de estratégias (α^*,β^*) é um equilíbrio de Nash para o jogo acima se

$$U^1(\alpha^*,\beta^*) \geq U^1(\alpha,\beta^*) \text{ para qualquer } \alpha \in [0,1]$$

e

$$U^2(\alpha^*,\beta^*) \geq U^2(\alpha^*,\beta) \text{ para qualquer } \beta \in [0,1].$$

O nosso primeiro resultado nos garante que se aceitarmos o uso de estratégias mistas, então todo jogo matricial tem equilíbrio de Nash.

Teorema 10.1. *Qualquer jogo com um número finito de jogadores e em que o conjunto de estratégias (puras) de cada jogador é também finito tem equilíbrio de Nash em estratégias mistas.*

O teorema acima foi na verdade o segundo resultado demonstrado por Nash em sua dissertação de doutorado. O primeiro resultado dizia que jogos em que os conjuntos de estratégias de todos os jogadores são convexos e compactos e suas funções ganhos são contínuas e côncavas sempre têm equilíbrio de Nash. Na verdade, o teorema acima é um simples corolário deste resultado. Tais fatos são apresentados aqui a título de curiosidade, mas vocês não precisam se preocupar com esses detalhes. O nosso interesse agora é aprender como encontrar tais equilíbrios em estratégias mistas. Para tanto, o resultado abaixo é fundamental.

Proposição 10.1. *Considere um jogo 2x2 qualquer em que nós estamos permitindo o uso de estratégias mistas. Suponha que* (α^*, β^*) *seja um equilíbrio de Nash deste jogo. Se* $0 < \alpha^* < 1$*, então*

$$B^1(\beta^*) = [0,1].$$

Similarmente, se $0 < \beta^* < 1$*, então*

$$B^2(\alpha^*) = [0,1].$$

Antes de demonstrar a proposição acima, vamos primeiro tentar entender o que ela nos diz. Olhemos para a primeira parte, por exemplo. Se $0 < \alpha^* < 1$, então o jogador 1 está jogando as suas duas estratégias puras com probabilidades positivas. A proposição, então, nos diz que isto só pode ocorrer se β^* fizer o jogador 1 indiferente entre todas as suas estratégias. Ou seja, todas as estratégias do jogador 1 têm que ser melhores respostas contra β^*. A demonstração da proposição acima é simples e nos mostra por que tal fato tem que ser verdade.

Demonstração da Proposição 10.1. Suponha que (α^*, β^*) seja um equilíbrio de Nash de um jogo 2x2 em que $0 < \alpha^* < 1$. Vimos antes que o ganho do jogador 1 neste caso pode ser escrito como

$$U^1(\alpha^*, \beta^*) = \alpha^* U^1(1, \beta^*) + (1 - \alpha^*) U^1(0, \beta^*).$$

Mas então, se $U^1(1, \beta^*) \neq U^1(0, \beta^*)$, α^* não será uma melhor resposta contra β^*.[10.3] Nós concluímos que $U^1(1, \beta^*) = U^1(0, \beta^*)$. Mas agora é fácil ver que isto implica que $U^1(\alpha, \beta^*) = U^1(\alpha^*, \beta^*)$ para qualquer $\alpha \in [0,1]$. Um raciocínio idêntico prova a parte da proposição referente a β^*. ‖

Para nós, a proposição 10.1 terá consequências práticas importantes, já que esta nos fornecerá um método para encontrar equilíbrios de Nash em estratégias mistas para jogos 2x2. A melhor forma de ver como a proposição 10.1 nos ajudará é estudar alguns exemplos.

Exemplo 10.1 (Solução do jogo de par ou ímpar)**.** Considere o jogo de par ou ímpar:

		Jogador Ímpar	
		P	I
Jogador Par	P	$1, -1$	$-1, 1$
	I	$-1, 1$	$1, -1$

Tentemos primeiro encontrar equilíbrios de Nash em que o jogador Par jogue P com probabilidade 1. Isto é, tentemos encontrar equilíbrios de Nash (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 1$. Mas quando o jogador Par joga P com probabilidade 1, a única melhor resposta para o jogador Ímpar é

[10.3] Por exemplo, se $U^1(1, \beta^*) > U^1(0, \beta^*)$, então, obviamente,

$$\begin{aligned} U^1(1, \beta^*) &= \alpha^* U^1(1, \beta^*) + (1 - \alpha^*) U^1(1, \beta^*) \\ &> \alpha^* U^1(1, \beta^*) + (1 - \alpha^*) U^1(0, \beta^*) \\ &= U^1(\alpha^*, \beta^*). \end{aligned}$$

jogar I com probabilidade 1. Porém, se Ímpar joga I com probabilidade 1, a melhor resposta para Par é jogar I com probabilidade 1. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que Par jogue P com probabilidade 1.

Tentemos agora encontrar equilíbrios de Nash em que Par jogue I com probabilidade 1. Isto é, tentemos encontrar equilíbrios de Nash (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 0$. Mas quando Par joga I com probabilidade 1, a única melhor resposta para Ímpar é jogar P com probabilidade 1. Porém, se Ímpar joga P com probabilidade 1, a melhor resposta para Par é jogar P com probabilidade 1. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que Par jogue I com probabilidade 1.

Nos resta agora tentar encontrar equilíbrios de Nash em que Par jogue alguma estratégia mista não degenerada. Isto é, equilíbrios (α^*, β^*) em que $0 < \alpha^* < 1$. Pela proposição 10.1, nós sabemos que para que isto ocorra β^* tem que ser tal que

$$U^{Par}(1, \beta^*) = U^{Par}(0, \beta^*).$$

Em termos dos ganhos do jogo a expressão acima pode ser escrita como a seguinte equação em função de β^* :

$$\beta^* * 1 + (1 - \beta^*) * (-1) = \beta^* (-1) + (1 - \beta^*) * 1.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\beta^* = 1/2$. Ou seja, para que o jogador Par esteja jogando uma estratégia mista, é necessário que o jogador Ímpar esteja jogando as suas duas estratégias puras com probabilidade igual a $1/2$. Mas isto implica que a estratégia que Ímpar tem que jogar também é mista. Usando a proposição 10.1 novamente, nós sabemos que neste caso α^* tem que ser tal que

$$U^{Ímpar}(\alpha^*, 1) = U^{Ímpar}(\alpha^*, 0).$$

Em termos dos ganhos do jogo a expressão acima pode ser escrita como a seguinte equação em função de α^* :

$$\alpha^* * (-1) + (1 - \alpha^*) * 1 = \alpha^* * 1 + (1 - \alpha^*) * (-1).$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\alpha^* = 1/2$. Observe que, de fato, com $\beta^* = 1/2$, qualquer estratégia do jogador Par dará um ganho igual a $1/2$. Similarmente, com $\alpha^* = 1/2$, qualquer estratégia do jogador Ímpar dará um ganho de $1/2$. Ou seja, $\alpha^* \in B^1(\beta^*) = [0, 1]$ e $\beta^* \in B^2(\alpha^*) = [0, 1]$. Nós concluímos que $(\alpha^*, \beta^*) = (1/2, 1/2)$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas do jogo de par ou ímpar. De fato, como nos outros dois casos não havia equilíbrio, nós podemos concluir que este é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Consideremos mais um exemplo.

Exemplo 10.2 (Solução do jogo Batalha dos Sexos)**.** Voltemos ao jogo Batalha dos Sexos que vimos na primeira aula sobre jogos.

		Homem	
		D	B
Mulher	D	$3, 1$	$0, 0$
	B	$0, 0$	$1, 3$

.

Tentemos descobrir os equilíbrios de Nash, permitindo estratégias mistas, deste jogo. Busquemos primeiro equilíbrios de Nash em que Mulher jogue D com probabilidade 1. Ou seja, equilíbrios (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 1$. Se Mulher joga D com probabilidade 1, então é fácil ver que a única melhor resposta para Homem é jogar D com probabilidade 1. Além disto, quando Homem joga D com probabilidade 1, a única melhor resposta para mulher é jogar D com probabilidade 1. Nós concluímos que o único equilíbrio de Nash de tal jogo em que Mulher joga D com probabilidade 1 é exatamente $(\alpha^*, \beta^*) = (1, 1)$.

Tentemos agora identificar os equilíbrios de Nash de tal jogo em que Mulher jogue B com probabilidade 1. Isto é, os equilíbrios (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 0$. É fácil ver que se Mulher joga B com probabilidade 1, então a única melhor resposta para Homem é jogar B com probabilidade 1. Além disto, quando Homem joga B com probabilidade 1, a única melhor resposta para Mulher é jogar B com probabilidade 1. Nós concluímos que o único equilíbrio de Nash em que mulher joga B com probabilidade 1 é $(\alpha^*, \beta^*) = (0, 0)$.

Finalmente, tentemos identificar os equilíbrios de Nash em que Mulher jogue uma estratégia mista não degenerada. Isto é, equilíbrios (α^*, β^*) em que $0 < \alpha^* < 1$. Nós sabemos que para isto acontecer β^* tem que ser tal que

$$U^M(1, \beta^*) = U^M(0, \beta^*),$$

o que em termos dos ganhos do jogo acima pode ser escrito como

$$\beta^* * 3 + (1 - \beta^*) * 0 = \beta^* * 0 + (1 - \beta^*) * 1.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\beta^* = 1/4$. Mas isto significa que Homem também estará jogando uma estratégia mista não degenerada. Novamente, nós sabemos que para que isto ocorra nós necessariamente temos que ter

$$U^H(\alpha^*, 1) = U^H(\alpha^*, 0),$$

o que em termos dos ganhos do jogo pode ser escrito como

$$\alpha^* * 1 + (1 - \alpha^*) * 0 = \alpha^* * 0 + (1 - \alpha^*) * 3.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\alpha^* = 3/4$. De fato, é fácil conferir que para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, $U^M(\alpha, 1/4) = 3/4$, e para qualquer $\beta \in [0, 1]$, $U^H(3/4, \beta) = 3/4$. Portanto, $3/4 \in B^M(1/4)$ e $1/4 \in B^H(3/4)$. Nós concluímos que $(\alpha^*, \beta^*) = (3/4, 1/4)$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas do jogo Batalha dos Sexos. Como nós esgotamos todas as possibilidades, nós aprendemos que o jogo acima tem três equilíbrios de Nash (quando permitimos o uso de estratégias mistas).

Nos dois jogos acima nós só encontramos equilíbrios em que ambos os jogadores jogavam estratégias puras ou equilíbrios em que os dois jogadores jogavam estratégias mistas não degeneradas. O exemplo a seguir mostrar que isto não tem que ser sempre verdade:

Exemplo 10.3. Considere o seguinte jogo:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador 1	C	$3,1$	$2,0$
	B	$3,0$	$1,3$

.

Tentemos descobrir os equilíbrios de Nash do jogo acima. Primeiro verifiquemos se existe algum equilíbrio em que o Jogador 1 jogue C com probabilidade 1. Ou seja, tentemos encontrar um equilíbrio (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 1$. Se o jogador 1 está jogando C com probabilidade 1, então a única melhor resposta para o jogador 2 é jogar E com probabilidade 1. Ainda, quando o jogador 2 joga E com probabilidade 1, jogar C é de fato uma melhor resposta para o jogador 1. Nós concluímos que o perfil $(\alpha^*, \beta^*) = (1, 1)$ é o único equilíbrio de Nash do jogo acima em que o jogador 1 joga C com probabilidade 1.

Tentemos agora encontrar equilíbrios em que o jogador 1 jogue B com probabilidade 1. Isto é, busquemos equilíbrios (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 0$. Mas se o jogador 1 está jogando B com probabilidade 1, então a única melhor resposta do jogador 2 é jogar D com probabilidade 1. Porém, quando o jogador 2 joga D com probabilidade 1, a melhor resposta do jogador 1 é jogar C com probabilidade 1. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que o jogador 1 joga B com probabilidade 1.

Finalmente, tentemos encontrar equilíbrios de Nash em que o jogador 1 usa estratégias mistas não degeneradas. Isto é, busquemos equilíbrios (α^*, β^*) em que $0 < \alpha^* < 1$. Pela proposição 10.1, nós sabemos que para que isto ocorra nós precisamos que

$$U^1(1, \beta^*) = U^1(0, \beta^*),$$

o que em termos dos ganhos do jogo pode ser escrito como

$$\beta^* * 3 + (1 - \beta^*) * 2 = \beta^* * 3 + (1 - \beta^*) * 1.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\beta^* = 1$. Ou seja, para que tenhamos a chance de obter um equilíbrio de Nash em que o jogador 1 joga uma estratégia mista não degenerada, nós precisamos que o jogador 2 esteja jogando E com probabilidade 1. Finalmente, para que tal perfil seja de fato um equilíbrio de Nash, nós precisamos garantir que jogar E com probabilidade 1 seja uma melhor resposta para o jogador 2. Uma condição necessária e suficiente para isto é que α^* seja tal que

$$U^2(\alpha^*, 1) \geq U^2(\alpha^*, 0).$$

Em termos dos ganhos do jogo, a condição acima pode ser escrita como

$$\alpha^* * 1 + (1 - \alpha^*) * 0 \geq \alpha^* * 0 + (1 - \alpha^*) * 3,$$

o que nos dá a condição $\alpha^* \geq 3/4$. Nós concluímos que o conjunto de equilíbrios de Nash para o jogo acima constitui-se de todos os perfis $(\alpha^*, 1)$ em que $\alpha^* \geq 3/4$.

10.3 Exercícios

Exercício 10.1 (Encontro em Nova Iorque)**.** *Os professores X e Y marcaram um encontro para tomar um café na loja do Starbucks próxima a Universidade de Nova Iorque. O problema é que eles esqueceram de combinar se eles estavam falando da loja no Washington Square*

Park ou da loja na Broadway. Suponha ainda que eles não têm como se comunicar.[10.4] *Tal situação pode ser representada pela seguinte matriz de ganhos:*

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\textit{Professor } Y} \\
 & & W & B \\
\cline{3-4}
\textit{Professor} & W & 1,1 & 0,0 \\
\cline{3-4}
X & B & 0,0 & 1,1 \\
\cline{3-4}
\end{array}.$$

Isto é, se ambos forem para o mesmo lugar, ambos recebem um ganho de 1. Se eles forem para lugares diferentes, ambos recebem um ganho de zero. Permitindo o uso de estratégias mistas, encontre todos os equilíbrios de Nash do jogo acima.

Exercício 10.2. *Considere o seguinte jogo:*

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\textit{Jogador } 2} \\
 & & E & D \\
\cline{3-4}
\textit{Jogador} & C & 1,1 & 0,1 \\
\cline{3-4}
1 & B & 0,1 & 2,0 \\
\cline{3-4}
\end{array}.$$

Permitindo o uso de estratégias mistas, encontre todos os equilíbrios de Nash do jogo acima.

Exercício 10.3 (Existência do Equilíbrio)**.** *Considere um jogo 2x2 genérico. Isto é, considere um jogo representado pela seguinte matriz de ganhos:*

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\textit{Jogador } 2} \\
 & & E & D \\
\cline{3-4}
\textit{Jogador} & C & U^1(C,E),U^2(C,E) & U^1(C,D),U^2(C,D) \\
\cline{3-4}
1 & B & U^1(B,E),U^2(B,E) & U^1(B,D),U^2(B,D) \\
\cline{3-4}
\end{array}.$$

(a) *Suponha que o perfil (C, E) seja um equilíbrio de Nash do jogo acima (sem o uso de estratégias mistas). Considere agora a extensão do jogo acima para o jogo correspondente em que os jogadores podem usar estratégias mistas. Seja α a probabilidade com que o jogador 1 joga C e β a probabilidade com que o jogador 2 joga E. Argumente que o perfil $(\alpha^*, \beta^*) = (1, 1)$ é um equilíbrio de Nash do novo jogo, em que estratégias mistas são permitidas.*

(b) *Suponha agora que saibamos que no jogo acima (sem o uso de estratégias mistas) jogar C seja uma melhor resposta para o jogador 1 quando 2 está jogando E. Suponha, também, que o jogo acima não tenha nenhum equilíbrio de Nash em estratégias puras. Isto vai implicar diversas relações entre os ganhos dos agentes nas diversas situações possíveis. Por exemplo, como já sabemos que C é uma melhor resposta contra E para o jogador 1, e já que por hipótese o jogo não tem equilíbrio de Nash em estratégias puras, não pode ser verdade que E seja uma melhor resposta contra C para o jogador 2. Em termos dos ganhos da matriz acima isto equivale a dizer que $U^2(C, D) > U^2(C, E)$. Usando o mesmo tipo de raciocínio compare agora $U^1(C, D)$ com $U^1(B, D)$, depois $U^2(B, E)$ com $U^2(B, D)$ e, finalmente, $U^1(C, E)$ com $U^1(B, E)$.*

[10.4] Este jogo foi criado muito antes da existência do telefone celular.

(c) *(Esta questão é mais difícil, mas prestando atenção na dica ela é resolvível.) Usando o que você aprendeu na letra (b), mostre que existe um valor* $\alpha^* \in (0,1)$ *tal que*

$$\alpha^* U^2 (C,E) + (1-\alpha^*) U^2 (B,E) = \alpha^* U^2 (C,D) + (1-\alpha^*) U^2 (B,D).$$

Similarmente, mostre que existe um valor $\beta^* \in (0,1)$ *tal que*

$$\beta^* U^1 (C,E) + (1-\beta^*) U^1 (C,D) = \beta^* U^1 (B,E) + (1-\beta^*) U^1 (B,D).$$

Dica: Suponha que a,b,c,d,e,f *sejam números tais que*

$$a - c = e > 0$$

e

$$b - d = f > 0.$$

Observe que

$$\frac{f}{e+f}a + \frac{e}{e+f}d = \frac{f}{e+f}c + \frac{e}{e+f}b.$$

(d) *Argumente que* (α^*, β^*) *é um equilíbrio de Nash do jogo acima quando nós permitimos o uso de estratégias mistas. Se você olhar com atenção você notará que a questão inteira é uma demonstração passo a passo de que jogos 2x2 sempre têm equilíbrios de Nash em estratégias mistas.*

Capítulo 11

Teoria dos Jogos - Jogos Sequenciais

11.1 Introdução

Até agora, em todas as situações estratégicas que estudamos, todos os agentes tomavam as suas decisões simultaneamente. No entanto, existem diversas situações econômicas importantes em que os agentes tomam decisões de forma sequencial. Por exemplo, em uma negociação, geralmente um agente faz uma primeira proposta e somente após ouvir tal proposta o outro agente diz se aceita ou não fechar o negócio.

Para que possamos estudar situações em que os agentes tomam decisões em sequência nós precisaremos introduzir o conceito de jogos na forma extensiva. Por simplicidade, ao discutir jogos na forma extensiva nós olharemos apenas para equilíbrios de Nash em estratégias puras. Ainda, nós nos concentraremos em uma classe particular de jogos chamados jogos de informação perfeita.

Embora o conceito de equilíbrio de Nash seja perfeitamente aplicável a jogos sequenciais, nós veremos que alguns destes equilíbrios não parecem razoáveis, dado que os agentes estão tomando decisões em sequência. Isto nos motivará a estudar o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogo. Nós veremos que tal conceito é um refinamento do conceito original que incorpora o fato de que agora nós temos agentes tomando decisões sequenciais.

11.2 Jogos na Forma Extensiva

Lembre-se que o típico jogo 2x2 podia ser representado pela seguinte matriz:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador	C	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
1	B	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$

Na representação acima temos a hipótese implícita de que os dois jogadores estão escolhendo as suas estratégias ao mesmo tempo. Mas suponha agora que o jogador 2 seja obrigado a tomar a sua decisão antes do jogador 1 e que somente após ver a decisão tomada por 2 é que 1 faça a sua escolha. A forma mais conveniente de se representar tal situação é através do que chamamos árvore de decisão. A figura 11.1 ilustra a árvore de decisão relativa à situação descrita acima. Os pontos pretos na figura são chamados nós de decisão. Cada nó de decisão é associado a um jogador. A interpretação é que o jogador indicado no nó é quem tem que tomar a decisão naquele ponto. Observe que na figura 11.1, o jogador 2 é quem toma a primeira decisão. Dependendo desta decisão o jogo se move para um dos outros dois nós, quando, então, é a vez do jogador 1 tomar uma decisão. Dependendo das decisões tomadas por ambos os jogadores o jogo atinge um dos quatro nós terminais e os jogadores recebem o ganho correspondente ao nó atingido.

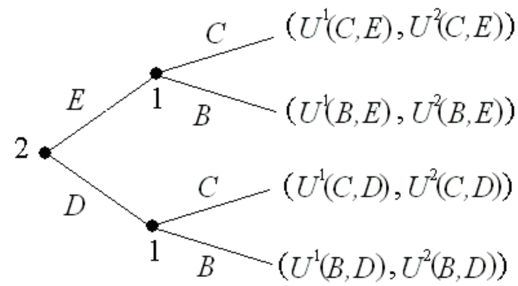

Figura 11.1: Jogo na Forma Extensiva

11.2.1 Estratégias

A situação na figura 11.1, embora sequencial, ainda é estratégica, portanto seria bom se pudéssemos estudá-la com o ferramental de teoria dos jogos que já possuímos. De fato, isto é possível. A primeira coisa que precisamos é definir um conceito de estratégia. Para nós, uma estratégia em um jogo em forma extensiva será uma lista que informa a ação que o jogador em questão tomaria em cada um de seus nós de decisão. Na verdade, esta será a convenção que adotaremos. As opções que o agente tem em cada um de seus nós de decisão serão chamadas de ações. Uma estratégia para nós será um plano que diz a ação que o agente pretende tomar em cada nó de decisão. No exemplo da figura 11.1, o jogador 2 só tem um nó de decisão, portanto uma estratégia para tal jogador consiste simplesmente em dizer se ele joga E ou D naquele nó. Já o jogador 1 possui 2 nós de decisão. Chamemos o nó na parte superior de nó número 1 e o na parte de baixo de número 2. Uma estratégia para o jogador 1 tem que dizer o que ele faria nestes dois nós. Por exemplo, a estratégia CB representa a situação em que o jogador 1 toma a ação C no nó de decisão número 1 e toma a ação B no nó de decisão número 2.

Dada a nossa definição de estratégia para um jogo na forma extensiva, nós vemos que no jogo da figura 11.1 o jogador 2 tem apenas duas estratégias, jogar E ou jogar D. Já o jogador 1 agora tem 4 estratégias, sendo elas jogar CC, CB, BC ou BB. Observe que agora, embora tenhamos começado com um jogo em forma extensiva, com a definição do conjunto de estratégias para ambos os jogadores, nós temos tudo o que é necessário para representar a situação acima como um jogo igual ao que nós temos trabalhado até agora. Por exemplo, nós podemos representar o jogo acima através do seguinte jogo matricial:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador 1	CC	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
	CB	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$
	BC	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
	BB	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$

É importante que fique claro como o jogo matricial acima foi construído. Observe que a primeira coluna representa a situação em que o jogador 2 iniciou o jogo tomando a ação E. Ou seja, representa a situação em que estamos na parte de cima da árvore de decisão na figura 11.1. Mas então, para a determinação dos ganhos finais dos dois jogadores só importará a ação que o jogador 1 estiver tomando no seu nó de decisão número 1. Os ganhos registrados na primeira coluna do jogo matricial acima refletem exatamente isto. Já a segunda coluna representa a situação em que o jogador 2 inicia o jogo tomando a decisão D, na árvore de decisão da figura 11.1. Nós podemos ver que neste caso, para a determinação dos ganhos finais do jogo, tudo o que importa é a ação que o jogador 1 toma em seu nó de decisão número 2. Novamente, os ganhos na segunda coluna do jogo matricial acima refletem exatamente isto.

Mas se nós podemos representar jogos sequenciais como jogos matriciais iguais aos que nós já estamos acostumados a trabalhar, então, em teoria, nós podemos falar de equilíbrios de Nash de tais jogos. É precisamente isto que discutiremos na próxima seção.

11.3 Equilíbrio de Nash de Jogos Sequenciais

Na seção anterior nós introduzimos a noção de jogos sequenciais e vimos como representar tais jogos na forma extensiva. Posteriormente, nós aprendemos a representar um jogo sequencial na forma extensiva como um jogo matricial. Nós usaremos isto para definir o nosso primeiro conceito de solução para jogos sequenciais.

Lembre-se que para um jogo na forma extensiva, uma estratégia para um determinado jogador consiste de uma lista que indica a ação tomada por este jogador em todos os seus nós de decisão. Nós definiremos, então, um perfil de estratégias como um equilíbrio de Nash, quando este perfil de estratégias for um equilíbrio de Nash do jogo matricial induzido pelo jogo sequencial em questão.

Exemplo 11.1 (Versão sequencial do dilema dos prisioneiros)**.** Considere o seguinte jogo na forma extensiva, que é uma representação sequencial do dilema dos prisioneiros:

Na figura 11.2 acima nós temos uma versão do jogo dilema dos prisioneiros em que o jogador 2 primeiramente escolhe se confessa ou não confessa e, somente depois de ver a decisão tomada pelo jogador 2 é que o jogador 1 decide se confessa ou não. Como nós fizemos acima, nós podemos escrever a versão matricial para tal jogo. Tal abordagem nos

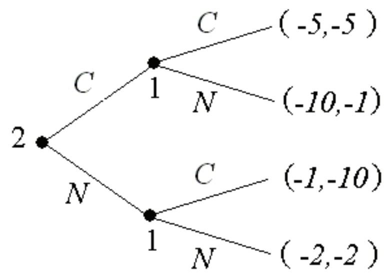

Figura 11.2: Versão sequencial do dilema dos prisioneiros

dá a seguinte representação em forma matricial:

		Jogador 2	
		C	N
Jogador 1	CC	$-5,-5$	$-1,-10$
	CN	$-5,-5$	$-2,-2$
	NC	$-10,-1$	$-1,-10$
	NN	$-10,-1$	$-2,-2$

.

Observe que no jogo acima a estratégia NN é estritamente dominada por CC. Nós podemos, portanto, simplificá-lo para

		Jogador 2	
		C	N
Jogador 1	CC	$-5,-5$	$-1,-10$
	CN	$-5,-5$	$-2,-2$
	NC	$-10,-1$	$-1,-10$

.[11.1]

Agora nenhum dos jogadores tem estratégias estritamente dominantes ou estritamentes dominadas. De qualquer forma, nós podemos tentar encontrar os equilíbrios de Nash, em estratégias puras, do jogo acima. Primeiramente, quando o jogador 1 joga CC, a melhor resposta para 2 é jogar C. De fato, quando o jogador 2 joga C, jogar CC também é uma melhor resposta para o jogador 1. Portanto, o perfil (CC, C) é um equilíbrio de Nash para o jogo acima. Vejamos agora o que acontece quando o jogador 1 joga CN. Neste caso a melhor resposta do jogador 2 é jogar N. Mas jogar CN não é uma melhor resposta para o jogador 1 quando 2 joga N. Nós concluímos que não existe nenhum equilíbrio de Nash em que 1 jogue CN. Vejamos se existe algum em que 1 jogue NC. Neste caso, a melhor resposta para 2 é jogar C. Mas quando 2 joga C, jogar NC não é uma melhor resposta para o jogador 1. Nós concluímos que o único equilíbrio de Nash da versão sequencial do dilema dos prisioneiros acontece quando o jogador 2 confessa no seu único nó de decisão e o jogador 1 confessa em ambos os seus nós de decisão.

[11.1] Lembre-se que quando nós simplificamos um jogo utilizando eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, o conjunto de perfis de estratégias que são equilíbrios de Nash permanece inalterado.

Acima, nós vimos que o resultado do dilema dos prisioneiros não muda muito quando estudamos sua versão sequencial. Será que o mesmo acontece com a variação do dilema dos prisioneiros que nós chamamos de o Amigo do Juiz?

Exemplo 11.2 (Versão sequencial do Amigo do Juiz)**.** Considere agora o seguinte jogo na forma extensiva:

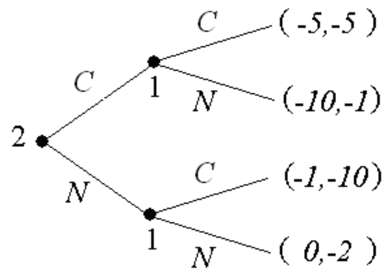

Figura 11.3: Versão sequencial do Amigo do Juiz

Novamente, vamos construir a matriz correspondente ao jogo acima.

		Jogador 2: C	N
Jogador 1	CC	$-5, -5$	$-1, -10$
	CN	$-5, -5$	$0, -2$
	NC	$-10, -1$	$-1, -10$
	NN	$-10, -1$	$0, -2$

Observe que agora a estratégia NC é estritamente dominada por CN. Nós podemos simplificar o jogo acima para

		Jogador 2: C	N
Jogador 1	CC	$-5, -5$	$-1, -10$
	CN	$-5, -5$	$0, -2$
	NN	$-10, -1$	$0, -2$

Agora, nenhuma outra estratégia é estritamente dominada. Tentemos, então, encontrar os equilíbrios de Nash do jogo acima diretamente. Primeiro chequemos se existe algum equilíbrio de Nash em que 1 jogue CC. Nesta situação, a melhor resposta para 2 é jogar C. E claro, como foi o caso anteriormente, quando 2 joga C, jogar CC é uma melhor resposta para o jogador 1. Nós vemos que, como no caso do dilema dos prisioneiros, o perfil (CC, C) também é um equilíbrio de Nash para a versão sequencial do jogo do amigo do juiz. Mas será que este ainda é o único equilíbrio? Vejamos o que acontece quando o jogador 1 joga CN. Neste caso, a melhor resposta para 2 é N. Quando 2 joga N, CN é de fato uma melhor resposta para 1, portanto, o perfil (CN, N) é também um equilíbrio de Nash para o jogo acima. Finalmente, será que existe algum equilíbrio de Nash em que 1 jogue NN? Se 1 joga NN, então a melhor resposta para 2 é jogar C. Mas quando 2 joga C, NN não é uma melhor resposta para 1.

Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que 1 jogue NN. Nós encontramos, então, dois equilíbrios de Nash para versão sequencial do jogo do amigo do juiz. Os perfis (CC, C) e (CN, N).

Até agora a estratégia que temos usado para resolver jogos sequenciais tem sido contruir um jogo matricial a partir de tal jogo e, posteriormente, computar os equilíbrios de Nash do jogo matricial construído. Embora tal estratégia de fato nos forneça alguma previsão do que vai acontecer, em um certo sentido ela ignora a natureza sequencial do jogo. Por exemplo, será que os dois equilíbrios de Nash que nós encontramos no jogo acima realmente fazem sentido? Na próxima seção nós introduziremos o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos e apresentaremos o método de solução por indução retroativa. Nós veremos que este novo conceito de solução leva em conta explicitamente a natureza sequencial do jogo e, as vezes, nos ajuda a diferenciar os equilíbrios de Nash que fazem mais sentido em um jogo sequencial dos que não fazem tanto sentido assim.

11.4 Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos e Indução Retroativa

Voltemos à versão sequencial do jogo do amigo do juiz acima. Vejamos o que nós conseguimos aprender a respeito dos dois equilíbrio de Nash daquele jogo. Comecemos com o equilíbrio (CC, C). Em tal equilíbrio 1 está jogando C em seus dois nós de decisão. Observe que em seu segundo nó de decisão jogar C não seria a melhor ação que 1 poderia tomar, mas como 2 está jogando C, aquele nó de decisão não é atingido e, portanto, a ação que 1 planejava tomar naquele nó não afeta o seu ganho. Observe que o fato de que o segundo nó de decisão não é atingido é essencial para que CC seja uma melhor resposta contra C. Isto ilustra uma das propriedades do conceito de equilíbrio de Nash em jogos sequenciais. Tal conceito, em um certo sentido, ignora as decisões tomadas em nós de decisão que não são atingidos. Mas será que esta propriedade é desejável? No jogo em questão, 2 só joga C no começo porque ele acredita que 1 jogaria C caso ele jogasse N. Mas será que esta é uma crença que faz sentido? Dois sabe que se ele jogasse N, 1 teria que decidir entre jogar C e receber um ganho de -1, ou jogar N e receber um ganho de 0. Por que ele acreditaria que 1 iria preferir jogar C e ficar com o ganho de -1?

A discussão acima motivou o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. A idéia de tal conceito é que todos os jogadores têm que tomar decisões ótimas em todos os nós de decisão, independentemente do fato destes serem atingidos ou não na solução do jogo. Para os jogos simplificados que nós estudaremos aqui, os equilíbrio de Nash perfeitos em subjogos serão exatamente os que podem ser obtidos pelo método da indução retroativa. Tal método consiste em irmos resolvendo o jogo do final para o começo. Nós primeiros começamos com os nós de decisão anteriores aos nós terminais e vemos qual a melhor ação que os agentes podem tomar naqueles nós. Após aprendermos o que o agentes fariam naqueles nós, nós elinamos aqueles nós do jogo, substituindo-os pelos ganhos que as ações ótimas dos jogadores implicariam naqueles nós. Isto nos dará um novo jogo reduzido, com nós terminais que acontecem mais cedo do que no jogo original. Nós agora repetimos o mesmo procedimento para o jogo reduzido, para obter um novo jogo reduzido. Continuamos repetindo tal processo até esgotarmos todos os nós de decisão do jogo. Um exemplo será instrutivo para entendermos o método.

Exemplo 11.3 (Resolvendo o jogo do amigo do juiz por indução retroativa)**.** Considere o jogo na figura 11.3 acima. Os dois nós de decisão antes dos nós terminais são do jogador 1. No nó mais acima a melhor coisa que 1 teria a fazer seria tomar a ação C. Já no nó mais abaixo a melhor coisa que 1 teria a fazer seria tomar a ação N. Tais ações gerariam um perfil de ganhos igual a $(-5,-5)$ no primeiro nó e $(0,-2)$ no segundo nó. Após registrarmos as ações tomadas por 1 nesses dois nós, nós os eliminamos do jogo subsituindo-os pelos ganhos que encontramos acima. Nós ficamos agora com o seguinte jogo simplificado:

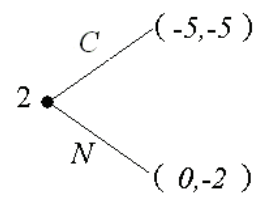

Figura 11.4: Jogo do amigo do juiz após primeiro estágio de indução retroativa

No jogo reduzido acima, é claro que a melhor coisa que 2 tem a fazer é jogar N. Isto dará um perfil de ganhos final igual a $(0,-2)$. Além disto, nós lembramos que a estratégia usada por 1 foi CN. Isto é, confessar no primeiro nó e não confessar no segundo. Mas, então, o perfil final que obtivemos com indução retroativa foi (CN, N) que é exatamente o segundo equilíbrio de Nash para a versão sequencial do amigo do juiz que nós encontramos acima. Tal fato não é uma particularidade deste jogo, como nós discutiremos abaixo.

Resolvendo o jogo do amigo do juiz por indução retroativa, nós acabamos chegando a um dos equilíbrios de Nash que nós tínhamos encontrado anteriormente. De fato, como a proposição abaixo mostra, os perfis de estratégia que nós encontramos por indução retroativa são sempre equilíbrios de Nash.

Proposição 11.1. *Todas as soluções por indução retroativa de qualquer jogo sequencial são sempre equilíbrios de Nash do jogo.*

A proposição acima, juntamente com o exemplo que acabamos de estudar, nos mostra que o método de solução por indução retroativa é uma forma de selecionar, dentre os equilíbrios de Nash do jogo, aqueles que fazem mais sentido dada a natureza sequencial da situação estratégica em questão. Consideremos mais um exemplo.

Exemplo 11.4 (Ameaça vazia)**.** Considere o jogo na figura 11.5:

Não é difícil ver que tal jogo tem apenas 2 equilíbrios de Nash. O primeiro deles consiste do perfil (CC, E) e o segundo do perfil (CB, D).[11.2] Será que o primeiro destes

[11.2] Para praticar, você pode montar a matriz do jogo e encontrar tais equilíbrios, mas com o tempo você deve começar a ser capaz de olhar para um jogo como este e facilmente identificar os seus equilíbrios de Nash.

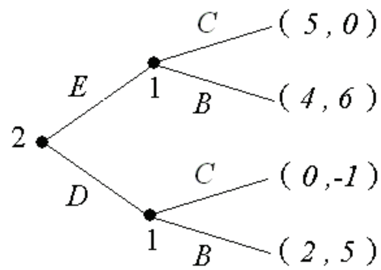

Figura 11.5: Equilíbrio de Nash com ameaça vazia

equilíbrios faz sentido? Primeiramente, note que tal equilíbrio não é perfeito em subjogos ou, equivalentemente, não seria obtido por indução retroativa. Observe que no seu segundo nó de decisão o agente 1 está fazendo uma escolha que não seria ótima para ele. Portanto, o que leva o jogador 2 a jogar E em tal equilíbrio é a ameaça de que se ele jogar D, então o jogador 1 jogará C. A primeira vista, até que esta não parece ser uma explicação muito ruim. O jogador 1, sabendo que ele poderia obter um ganho maior caso o jogador 2 jogasse E, ameaça jogar C se o jogador 2 jogar D. O jogador 2, acreditando nisto, acaba realmente jogando E. Mas será que faz sentido o jogador 2 acreditar em tal ameaça? Observe que se o jogador 2 ignorar a ameaça e jogar D, o jogador 1 não tem nenhum incentivo para levar a ameaça adiante. Tal situação é o que nós chamamos de ameaça vazia.

Em geral, nós sempre trabalharemos com o conceito de perfeição em subjogos e, portanto, consideraremos que equilíbrios de Nash baseados em ameaças vazias não são aceitáveis. Por trás disto, está a idéia de que situações em que algum agente de fato leva uma ameaça vazias às últimas consequências devem ser representadas com ganhos diferentes, em que as ameaças vazias não são mais vazias. Por exemplo, o jogador 1 poderia sentir algum prazer ao se vingar do jogador 2 e fazê-lo ter um ganho de -1 caso ele jogue D. Mas neste caso o ganho do jogador 1 em tal situação deveria refletir isto. Por exemplo, poderíamos dizer que ele teria um ganho de 3 nesta situação. Note que com esta modificação o perfil (CC, E) seria a solução do jogo por indução retroativa.

11.5 Exercícios

Exercício 11.1 (Batalha dos Sexos Sequencial)**.** *Considere a versão sequencial do jogo Batalha dos Sexos representada pela árvore de decisão abaixo*

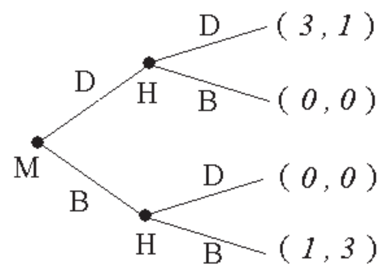

Figura 11.6: Versão sequencial do jogo Batalha dos Sexos

No jogo acima, Mulher primeiramente escolhe ir à danceteria ou ao bar. Após ver a escolha de Mulher, Homem decide se vai à danceteria ou ao bar. Nos nós terminais o ganho do jogador Mulher vem representado na primeira posição. Por exemplo, quando Mulher joga D e Homem toma a ação D no seu nó de decisão superior, Mulher recebe um ganho de 3 e Homem recebe um ganho de 1.

(a) *Represente o jogo acima na forma matricial e encontre todos os seus equilíbrios de Nash (em estratégias puras).*

(b) *Resolva o jogo por indução retroativa e identifique qual dos equilíbrios encontrados na letra (a) é perfeito em subjogos.*

Exercício 11.2 (Barreira a Entrada). *Suponha que a firma F_2 seja monopolista em um mercado que enfrenta a ameaça da entrada de uma nova empresa F_1. Se F_1 resolver ficar de fora do mercado (estratégia F), então F_1 recebe um ganho de 1 e F_2 recebe um ganho de 9. Caso F_1 resolva entrar no mercado (estratégia E), então F_2 tem duas opções. Ela pode lutar com F_1 para expulsá-la do mercado (estratégia L). Neste caso, ambas as empresas têm um alto custo e ficam com um ganho de 0. Por outro lado, F_2 pode decidir não lutar contra F_1 (estratégia N). Neste caso ambas recebem um ganho de 2. Tal situação pode ser caracterizada pela seguinte árvore de decisão:*

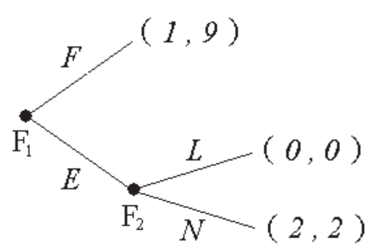

Figura 11.7: Jogo de entrada no mercado

(a) *Resolva o jogo acima por indução retroativa.*

(b) *Suponha agora que F_2, já sabendo da possível entrada de F_1 no mercado, considere a opção de investir imediatamente em um aumento de capacidade. Neste caso, ela incorre um custo de -3 imediatamente. Tal custo se refletirá nos ganhos de F_2 em todas as situações, menos no caso de uma luta pelo mercado. A idéia é que o aumento prévio de capacidade dá uma vantagem a F_2 na luta pelo mercado que compensa o seu custo. Esta nova situação pode ser representada pela seguinte árvore de decisão:*

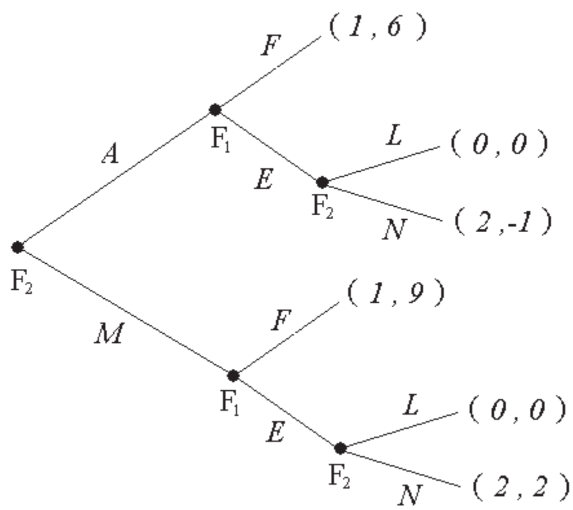

Figura 11.8: Possibilidade de investimento prévio em capacidade

Resolva este novo jogo por indução retroativa.

Exercício 11.3 (Jogo da Centopéia)**.** *Considere o seguinte jogo em que os jogadores alternadamente têm que tomar a decisão de parar ou continuar.*

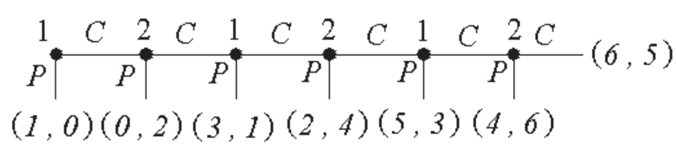

Figura 11.9: Jogo da centopéia

Resolva o jogo por indução retroativa.

Exercício 11.4 (Divisão de Torta)**.** *Suponha que uma torta vá ser dividida entre dois indivíduos. A divisão ocorrerá da seguinte forma. Primeiro o indivídio 1 parte a torta em dois pedaços. Posteriormente o indivíduo 2 escolhe o seu pedaço e o pedaço restante fica para o indivíduo 1. Usando o conceito de indução retroativa de forma intuitiva, descreva todas as soluções por indução retroativa do jogo nas três situações abaixo. Quando eu escrevo* *de forma intuitiva isto significa que você não precisa escrever a árvore de decisão do jogo nem usar matemática. Você deve explicar a sua solução apenas com palavras.*

(a) *Suponha primeiro que a torta seja de um único sabor e ambos os indivíduos gostem do sabor em questão. Descreva todas as soluções por indução retroativa do jogo neste caso.*

(b) *Suponha agora que a torta seja metade de chocolate e metade de baunilha. Suponha ainda que o indivíduo 1 só goste de chocolate e o indivíduo 2 só goste de baunilha. Suponha ainda que ao se deparar com dois pedaços com a mesma quantidade de baunilha o indivíduo 2 prefira aquele que tem menos quantidade de chocolate. Descreva todas as soluções por indução retroativa do jogo neste caso.*

(c) *Suponha agora que a torta seja metade de chocolate e metade de baunilha. Suponha ainda que o indivíduo 1 goste igualmente dos dois sabores, mas que o indivíduo 2 só goste de baunilha. Suponha ainda que ao se deparar com dois pedaços com a mesma quantidade de baunilha o indivíduo 2 prefira aquele que tem menos quantidade de chocolate. Descreva todas as soluções por indução retroativa do jogo neste caso.*